USTHB
Faculté d'Électronique et d'Informatique
Département d'Informatique
Master 2 SII — Année Universitaire : 2022-2023
Représentation des connaissances 2

TD N° 3
Théorie des possibilités – Fonctions de croyances

Rappel :

Théorie des possibilités

Notations :

Notations:

- $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini
- Ω l'ensemble des interprétations associées à $\mathcal{L}$.
- $\varphi, \Psi, \ldots$ des formules propositionnelles.
- ω est une interprétation.
- $\omega \models \varphi$ ou $\omega \in [\varphi]$ signifie que ω satisfait φ.

a-Distributions de possibilités:

-Une distribution de possibilités π est une fonction sur l'ensemble des interprétations Ω vers [0,1]. La distribution des possibilités π décrit les états plus ou moins possibles du monde.

- Si $\pi(\omega)=0$ alors l'interprétation ω est impossible
- Si $\pi(\omega)=1$ alors l'interprétation ω est complètement possible
- Si $\pi(\omega) > \pi(\omega')$ alors l'interprétation ω est préférée à ω'

La condition de normalisation satisfait la condition suivante:
$\exists\ \omega \in \Omega,\ \ \pi(\omega)=1$.
Elle exprime qu'il existe une interprétation dans Ω complètement possible c.a.d complètement cohérente avec les croyances disponibles.

b-Degré de possibilité:

Toute distribution de possibilité π sur Ω induit une mesure de possibilité Π.

Le degré de cohérence ou la mesure de possibilité d'une formule φ est défini par:

$\Pi(\varphi) = \max \{\pi(\omega) : \omega \models \varphi \}$

Il évalue dans quelle mesure φ est cohérente avec les croyances disponibles exprimées par π.

$\Pi(\varphi)=1$ et $\Pi(\neg\varphi)=1$ Ignorance totale sur φ

$\Pi(\varphi)=1$ et $\Pi(\neg\varphi)=0 \models \varphi$ est certainement vraie

$\Pi(\varphi \vee \psi)=\max(\Pi(\varphi), \Pi(\psi))$

c- Degré de nécessité:

Le degré de certitude ou de nécessité d'une formule φ est défini par:

$N(\varphi) = 1- \Pi(\neg\varphi)$

Il évalue dans quelle mesure φ peut être déduite à partir des croyances disponibles.

$N(\varphi)$ exprime à quel point il est certain que φ soit vraie.

$N(\varphi)=1$ et $N(\neg\varphi)=0$ φ est certaine

$N(\varphi)=0$ et $N(\neg\varphi)=0$ ignorance totale

$$N(\varphi\wedge\psi)=\min(N(\varphi),N(\psi))$$

$N(\varphi) >0 \Rightarrow \Pi(\varphi)=1$.

Un événement est complètement possible avant qu'il soit un peu certain.

d- Le conditionnement:

Dans la théorie des possibilités, deux types de conditionnement ont été définis :

- Le conditionnement basé sur le minimum défini par:

$$\pi_{min}(\omega|\varphi)=\begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

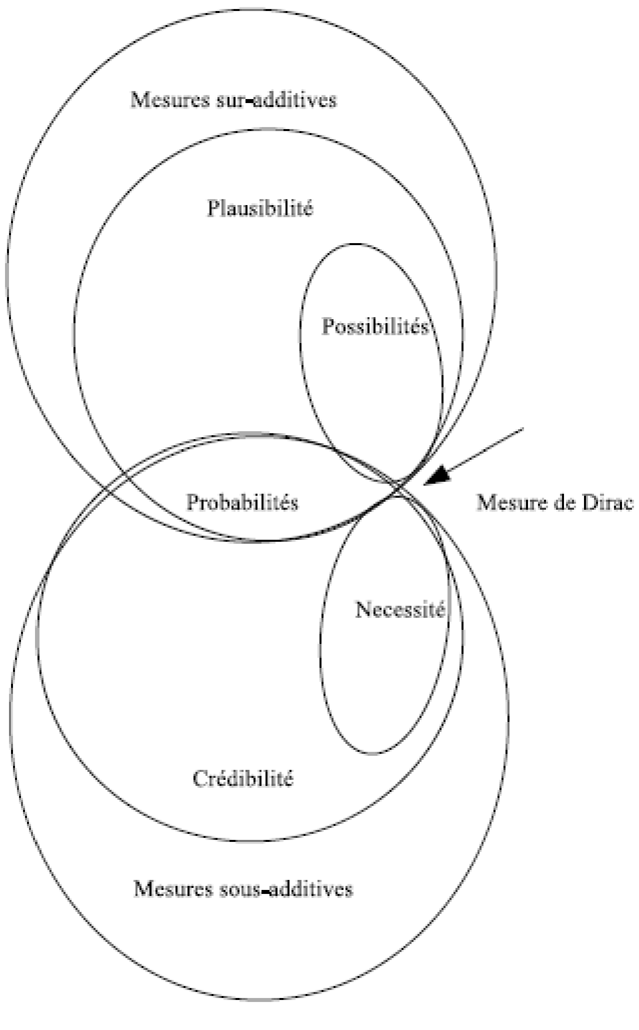
Il est assigné au meilleur modèle de φ le degré maximal de possibilités

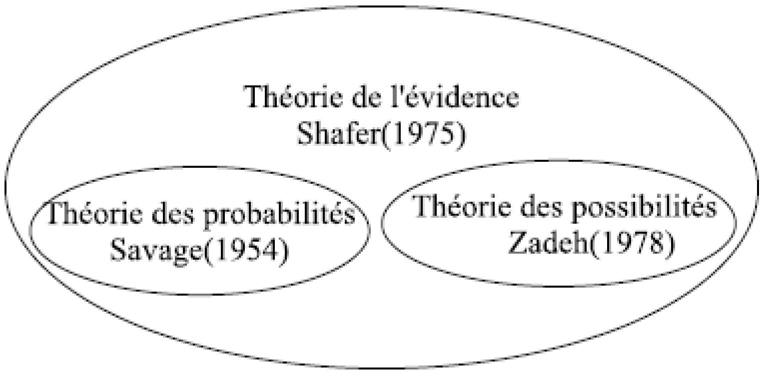
- Le conditionnement basé sur le produit défini par :

$$\pi_{*}(\omega|\varphi)=\begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\varphi)} & \text{si } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les éléments sont augmentés proportionnellement

Relations entre les différentes mesures de l’incertain :





Exercice 1 :

Considérons trois variables binaires, relatives à l’apparition de la jaunisse (I) chez un malade, l’hépatite (H) et la cirrhose (C). La table suivante donne la distribution de possibilités initiale.

I	H	C	$\pi(I \wedge H \wedge C)$
n	n	n	0.6
n	n	o	0.2
n	o	n	0.1
n	o	o	1
o	n	n	0.4
o	n	o	0.8
o	o	n	0.9
o	o	o	1

1- La distribution initiale est-elle normalisée.

La distribution est dite normalisée car $\exists\ \omega \in \Omega$, $\pi(\omega)=1$. En effet, $\pi(\omega_4)= \pi(\omega_8)=1$

Supposons qu’une nouvelle information certaine arrive relative au fait que le patient a une hépatite. La croyance est représentée par φ.

2- Calculez le degré de possibilité de $\Pi(\varphi)$ et le degré de nécessité $N(\varphi)$.

$\Pi(\varphi) = \max \{\pi(\omega): \omega \models \varphi\}$

$\omega_3 \models \varphi$; $\omega_4 \models \varphi$; $\omega_7 \models \varphi$; $\omega_8 \models \varphi$

Il vient que $\Pi(\varphi)= \max\{0.1,1,0.9,1\}=1$. Ainsi $N(\varphi) >0$;

En effet, par définition : $N(\varphi) = \min \{1-\pi(\omega): \omega \not\models \varphi\}$.

Or $\omega_1 \not\models \varphi$; $\omega_2 \not\models \varphi$; $\omega_5 \not\models \varphi$; $\omega_6 \not\models \varphi$

Il vient : $N(\varphi)=\min\{1-0.6, 1-0.2, 1-0.4, 1-0.8\}=0.2$

3- En utilisant les deux équations du conditionnement, calculez les nouvelles distributions $\pi(I \wedge H \wedge C|\varphi)$ dans les cas où le conditionnement est basé sur le minimum et sur le produit.

- Le conditionnement basé sur le minimum défini par:

$$\pi_{min}(\omega|\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le conditionnement basé sur le produit défini par :

$$\pi_{*}(\omega|\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\varphi)} & \text{si } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I	H	C	$\pi(I \wedge H \wedge C)$	$\pi_{min}(\omega\|\varphi)$	$\pi_{*}(\omega\|\varphi)$
n	n	n	0.6	0	0
n	n	o	0.2	0	0
n	o	n	0.1	0.1	0.1
n	o	o	1	1	1
o	n	n	0.4	0	0
o	n	o	0.8	0	0
o	o	n	0.9	0.9	0.9
o	o	o	1	1	1

Exercice 2 : (probabilités et possibilités)
Soit X={J, JPlus1, JPlus2, JPlus3, JPlus4, JPlusn} représentant les jours consécutifs à l'envoi d'un courrier.

Jour	Probabilité(Jour)	Possibilité(Jour)
J	0	0
JPlus1	0.25	1
JPlus2	0.55	1
JPlus3	0.1	1
JPlus4	0.07	0.5
JPlusn	0.03	0.3

a- Le courrier peut-il parvenir au plus tôt à J+2 ?
b- Le courrier peut-il parvenir entre 1 et 3 jours ?

J J+1 J+2 J+3 J+4 ……….. J+N

	Probabilités	Possibilités
a	P(J+2)+ P(j+3)+P(j+4)+P(j+n) = 0.75	Max(Max(Π(j+2),Π(j+3),Π(j+4),Π(j+n)) =1
b	P(J+1)+ P(j+2)+P(j+3) = 0.9	Max(Π(j+1),Π(j+2),Π(j+3)) = 1

En théorie des probabilités, P(b) > P(a) implique que b est plus probable que a.
En théories des possibilités, Π(b) = Π(a)=1 implique il est totalement possible que le courrier arrive entre j+2 et j+3. Cela correspond à l'intersection des deux intervalles.

Exercice 3 :
Considérons le problème pour définir l'ère à laquelle appartient un fossile. Supposons que les géologues utilisent un test radioactif sur les fossiles afin de définir à quelle race ils appartiennent telles que race={Mammifère, poisson, oiseau} et ère ={Ceno,Méso,Paleo}.
Les distributions initiales sont données par le tableau suivant :

Ere	Race	π(Ere $\wedge$ Race)
Ceno	Mammifère	0.2
Ceno	Poisson	1
Ceno	Oiseau	0
Méso	Mammifère	0.3
Méso	Poisson	0.7
Méso	Oiseau	0.7
Paléo	Mammifère	0.5
Paléo	Poisson	0.2
Paléo	Oiseau	1

Supposons que nous avons une information certaine indiquant que le fossile appartient à la classe des mammifères. La croyance est représentée par φ.

1- Calculez le degré de possibilité de $\Pi(\varphi)$ et le degré de nécessité $N(\varphi)$.

Supposons que nous avons une information certaine indiquant que le fossile appartient à la classe des mammifères. La croyance est représentée par φ.

L'information certaine φ: mammifère.

1- $\omega_1 \models \varphi$; $\omega_4 \models \varphi$; $\omega_7 \models \varphi$; d'où

$\Pi(\varphi)=\max\{\boldsymbol{\pi(\omega)} : \omega \models \varphi\}= \max(0.2,0.3,0.5)=0.5$

$N(\varphi)=\min\{1-\boldsymbol{\pi(\omega)} : \omega \not\models \varphi\}=\min\{1-1,1-0,1-0.7,1-0.2\}=0$

$\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_8, \omega_9 \not\models \varphi$.

2- En utilisant les deux équations du conditionnement, calculez les nouvelles distributions $\pi(\text{Ere} \wedge \text{Race}|\varphi)$ dans les cas où le conditionnement est basé sur le minimum et sur le produit.

	Ere	**Race**	$\pi(\omega)$	$\pi(\omega\|_{*}\varphi)$	$\pi(\omega\|_{min}\varphi)$
ω_1	Ceno	Mammifère	0.2	0.2/0.5=0.4	0.2
ω_2	Ceno	Poisson	1	0	0
ω_3	Ceno	Oiseau	0	0	0
ω_4	Méso	Mammifère	0.3	0.3/0.5=0.6	0.3
ω_5	Méso	Poisson	0.7	0	0
ω_6	Méso	Oiseau	0.7	0	0
ω_7	Paléo	Mammifère	0.5	1	1
ω_8	Paléo	Poisson	0.2	0	0
ω_9	Paléo	Oiseau	1	0	0

Exercice 4 :

Trois experts tentent d'identifier une zone à partir d'une image aérienne.

- Le premier affirme qu'il s'agit d'un Hangar à 30%, d'un Champ à 40 % ou d'une zone Militaire à 30%.
- Le deuxième atteste que la zone correspond à 50% à un Hangar et elle pouvait appartenir à soit à un Hangar soit à Champ à 20%.
- Le dernier expert affirme qu'il s'agit d'un Hangar ou d'une zone Militaire à 60%.

1- Modélisation des connaissances avec la théorie des fonctions de croyance

Soient les symboles suivants : H : Hangar ; C : Champ ; M : Zone militaire

Soit Ω={H,C,M}

Expert 1 :

$M_1(\{H\})= 0.3$

$M_1(\{C\})= 0.4$

$M_1(\{M\})= 0.3$

Expert 2:

$M_2(\{H\})= 0.5$

$M_2(\{H,C\})=0.2$

$M_2(\Omega)= 0.3$

Expert 3:

$M_3(\{H,M\})= 0.6$

$M_3(\Omega)= 0.4$

2-Calculez les degrés de croyance et les degrés de plausibilité dans de la deuxième expertise :

Degré de croyance : bel(A)= $\sum_{B\subset A} m(B)$

Degré de Plausibilité Pl(A)= $\sum_{B\cap A=\emptyset} m(B)$

A	M(A)	Bel(A)	Pl(A)
{H}	0.5	0.5	1
{C}	0	0	0.5
{M}	0	0	0.3
{C,H}	0.2	0.7	1
{C,M}	0	0	0.5
{H,M}	0	0.5	1
Ω	0.3	1	1

2- Quelles sont les particularités des distributions de possibilités.

- Pour la première expertise, les éléments focaux sont des singletons. Donc la modélisation correspond à une modélisation probabiliste où le degré de probabilité est égal au degré de plausibilité et au degré de croyance. P(A)=Bel(A)=Pl(A)

- Pour la deuxième expertise, les éléments focaux sont emboités:

  $\{H\} \subset \{C,H\} \subset \Omega$

  Donc la modélisation correspond à une modélisation de la théorie des possibilités où le degré de croyance est égal au degré de nécessité et le degré de plausibilité est égal au degré de possibilité.

  Bel (A)= N(A) ; PL(A)= Π(A).

- Pour la troisième expertise, les éléments focaux sont également emboités.

3- La combinaison des différentes expertises se fait à l'aide de la rège de Dempster. Les distributions de masses sont combinées deux à deux. L'ordre de combinaison n'est pas important car aucune priorité n'est affectée aux experts.

La distribution de masse résultante doit respecter les propriétés affectées aux distributions de masse à savoir :

$\sum m(A) = 1$

$M(\emptyset)= 0$

La combinaison de deux distributions de masse m_1 et m_2 se fait comme suit :

$m(A)=\frac{1}{1-k}\sum_{B\cap C=A} m1(B) * m2(C)$

Avec k qui représente le degré de conflit. Il est défini par :

$K=\sum_{B\cap C=\emptyset} m1(B) * m2(C)$

La combinaison de m_1 et m_2 est réalisée comme suit :

M_2 / M_1	{H} 0.5	{H,C} 0.2	Ω 0.3
{H} 0.3	{H} 0.15	{H} 0.06	{H} 0.09
{C} 0.4	∅ 0.2	{C} 0.08	{C} 0.12
{M} 0.3	∅ 0.15	∅ 0.06	{M} 0.09

$K=m_1(\{C\})*m_2(\{H\})+m_1(\{M\})*m_2(\{H\})+m_1(\{M\})*m_2(\{H,C\})=0.41$

$M_{12}(\{H\})= \frac{1}{1-k} *(m_1(\{H\})*m_2(\{H\})+m_1(\{H\})*m_2(\{H,C\})+m_1(\{H\})*m_2(\Omega))=0.5082$

$M_{12}(\{C\})= \frac{1}{1-k}*(m_1(\{C\})*m_2(\{H,C\})+m_1(\{C\})*m_2(\Omega))=0.3388$

$M_{12}(\{M\})=\frac{1}{1-k}*(m_1(\{M\})*m_2(\Omega))=0.15255.$

La combinaison de m_{12} et m_3 est réalisée comme suit :

M_3 / M_{12}	{H,M} 0.2	Ω 0.3
{H} 0.5082	{H} 0.3049	{H} 0.2032
{C} 0.3388	∅ 0.2032	{C} 0.1355
{M} 0.1525	{M} 0.0915	{M} 0.061

$K=m_{12}(\{C\})*m_3(\{H,M\})= 0.2032$

$M_{123}(\{H\})= \frac{1}{1-k} *(m_{12}(\{H\})*m_3(\{H,M\})+m_{12}(\{H\})*m_3(\Omega))=0.6376$

$M_{123}(\{C\})= \frac{1}{1-k}*(m_{12}(\{C\})*m_3(\Omega))=0.17$

$M_{123}(\{M\})=\frac{1}{1-k}*(m_{12}(\{M\})*m_3(\{H,M\})+m_{12}(\{M\})*m_3(\Omega))=0.1913$

En conclusion, l'hypothèse {H} est la plus soutenue.